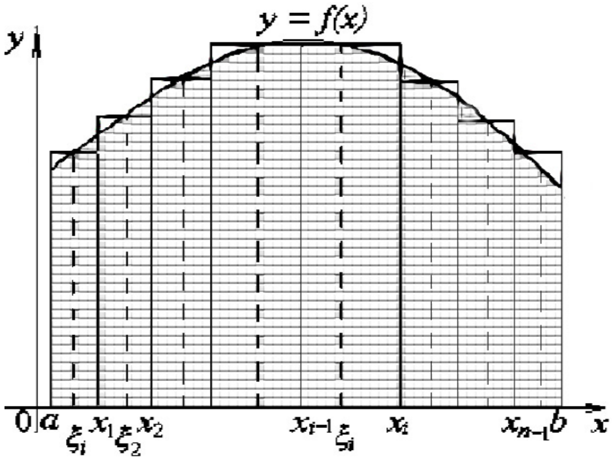
Определение: Назовем *разбиением* ***{T}*** *отрезка* $[a;b]$ множество точек $\{x_0; x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.



Определение: Назовем *диаметром разбиения* длину наибольшего интервала разбиения, т.е. $d = \max\limits_i \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = \overline{0, n-1}$

Определение: Функция f *интегрируема по Риману на отрезке* $[a;b]$ (обозначение $f \in \mathfrak{R}[a;b]$), если

$$\exists \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \text{где } \ \xi_i \in [x_i; x_{i+1}], \qquad (*)$$

Замечание: Значение предела $(*)$ не должно зависеть от выбора точек x_i и ξ_i.

Определение: Выражение $S_n = S_n(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой функции f на отрезке $[a;b]$, отвечающее разбиению $\{x_i\}$*.

Определение: $s(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$, где $m_i = \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x)$ – *нижняя сумма Дарбу.*

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \text{ где } M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) \text{ – верхняя сумма Дарбу.}$$

$$I_* = \sup_{\{T\}}\{s(f)\} = \lim_{d\to 0} s(f) - \text{нижний интеграл Дарбу.}$$

$$I^* = \inf_{\{T\}}\{S(f)\} = \lim_{d\to 0} S(f) - \text{верхний интеграл Дарбу.}$$

Теорема (*критерий Римана интегрируемости функции на отрезке*):

Для $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\{T\} :\ |S - s| < \varepsilon \iff f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$.

Замечание 1: $\exists \lim\limits_{d\to 0} s = \lim\limits_{d\to 0} S \iff f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$.

Замечание 2: $\exists \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} w_i(f)\Delta x_i = 0 \iff f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, где $w_i(f) = \left| \sup\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) - \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) \right|$. Напомним, что выражение $w_i(f)$ называется *колебанием функции f на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$*.

Теорема Пусть выполнено одно из условий:

1. f непрерывна на отрезке $[a;b]$;
2. f ограничена и монотонна на отрезке $[a;b]$;
3. f ограничена и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва.

Тогда функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$.

Определение: Множество $\mathbf{X}$ называется *множеством меры нуль (по Лебегу)*, если $\forall\varepsilon > 0$ существует конечная или счётная система интервалов, покрывающая все точки множества $\mathbf{X}$, причём сумма длин этих интервалов меньше ε.

Теорема (*критерий Лебега интегрируемости функции на отрезке*):

f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет меру нуль.

Утверждение (*непрерывность интеграла*):

Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad \text{и} \quad G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$$

непрерывны на этом отрезке.

30.1. *(2181, 2182, 2186, 2191)*

Объясните интегрируемость функции f и найдите интеграл $\int\limits_{\{x\}} f(x)\,dx$ с помощью интегральных сумм, если:

(а) $\bullet$ $f(x) = x^2$, $\quad \{\mathbf{x}\} = [-1;2]$;

(б) $f(x) = 1 + x$, $\quad \{\mathbf{x}\} = [-1;4]$;

(в) $f(x) = x^3$, $\quad \{\mathbf{x}\} = [1;3]$;

(г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \{\mathbf{x}\} = [a;b]$, $\ (0 < a < b)$;

(д) $f(x) = a^x$, $\quad a > 0$, $\quad \{\mathbf{x}\} = [0;1]$;

(е) $\star$ $f(x) = \ln x$, $\quad \{\mathbf{x}\} = [1;2]$.

30.2. Докажите следующее

Утверждение (*критерий Коши интегрируемости функции на отрезке*):

Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, тогда и только тогда, когда для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, что для любых разбиений $\{T_1\}, \{T_2\}$ отрезка $[a;b]$ с диаметрами $d_1 < \delta$, $d_2 < \delta$ выполняется неравенство

$$|S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f)| < \varepsilon,$$

где $S_{T_i}(f)$ - интегральная сумма функции f на отрезке $[a;b]$, отвечающее разбиению $\{T_i\}$.

30.3.

(а) • Пусть функции f и φ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Докажите, что

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $x_i \leqslant \xi_i, \theta_i \leqslant x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $(i = \overline{0, n-1})$.

(б) • Пусть функция f ограничена и монотонна на $[0;1]$. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

(в) Пусть функция f имеет производную f' в некоторой окрестности точки x, причём f' непрерывна в точке x. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f\Big(x+\tfrac{k}{k^2+n^2}\Big) - f(x)\right) \; = \; f'(x)\cdot\ln\sqrt{2}.$$

30.4. Докажите, что *функция Римана* $R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x \text{ - рациональное число } \dfrac{p}{q}, \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$ интегрируема на любом конечном отрезке,

Вычислите интеграл от *функции Римана* по произвольному отрезку.

30.5. • Докажите, что *функция Дирихле* $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$ не интегрируема на любом отрезке.

30.6. Исследуйте следующие функции на интегрируемость на сегменте $[0;1]$:

(а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ (б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

30.7. Следует ли из интегрируемости функции $|f|$ интегрируемость функции f?

30.8. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$. Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad 0<\varepsilon<b-a.$$

30.9. Покажите некорректность определения интеграла, при котором

(а) • отрезок разбивается на равные части, а значения функции берутся в серединах отрезков разбиения;

(б) не требуется стремление максимума длин отрезков разбиения к нулю.

30.10. • Пусть функции f и φ интегрируемы. Обязательно ли будет интегрируема их суперпозиция $\varphi\bigl(f\bigr)$?

30.11. (*соотношение интегрируемости и существования первообразной на отрезке*)

Установите, верны ли следующие утверждения:

(а) Любая интегрируемая на сегменте функция имеет первообразную на нём;

(б) Любая функция, имеющая первообразную на сегменте является интегрируемой на нём.

30.12. Докажите, что для существования определённого интеграла функции f на интервале $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы по заданным числам $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ можно было найти такое $\delta(\varepsilon,\sigma) > 0$, что при диаметре разбиения $d < \delta$, сумма $\sum\limits_{i'} \Delta x_{i'}$ длин тех интервалов, которым отвечают колебания функции $w_{i'}(f) \geqslant \varepsilon$ сама меньше σ.

30.13. *(2200, 2202)*

(а) Пусть f интегрируема на отрезке $[a;b]$. Докажите, что $|f|$ интегрируема на $[a;b]$, причём $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

(б) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $c \leqslant f(x) \leqslant d$ для $\forall x \in [a;b]$; пусть функция $\varphi(y)$ непрерывна на $[c;d]$. Докажите, что их суперпозиция $\varphi\bigl(f(x)\bigr)$ интегрируема на $[a;b]$.

30.14. ⋆ Определите все интегрируемые на отрезке $[0;1]$ функции f, удовлетворяющие условиям:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right), \quad x \in [0;1];$$

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 1.$$

30.15. ⋆ Функция $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f'(x)| \leqslant 1$ всюду на отрезке $[a;b]$. Докажите, что если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \dfrac{1}{b-a}$, $\xi_i \in [x_{i-1};x_i)$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \frac{1}{2},$$

и покажите, что приведённая оценка *неулучшаема*, т.е. найдётся функция, удовлетворяющая всем условиям задачи, на которой достигается равенство.

30.16. ⋆ Существует ли функция f, непрерывная на полуоси $(1;+\infty)$ и такая, что

$$\int\limits_x^{x^2} f(t)dt = 1, \quad \forall x \in (1;+\infty)?$$

Теорема (*формула Ньютона - Лейбница*):

Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и $F'(x) = f(x)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Теорема (*интегрирование по частям*): Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Теорема (*формула замены переменной*): Предположим, что: функция

$$\varphi\,:\,[\alpha,\beta] \mapsto [c,d] \supset [a,b],\quad a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$$

непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, а f непрерывна на отрезке $[c,d]$. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \varphi(t) \\ dx & = & \varphi'(t)\,dt \end{array}\right\} = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Утверждение (*обобщение формулы Ньютона - Лейбница*):

Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, f терпит *разрывы первого рода* во внутренних точках $c_i \in (a;b)$, $i=\overline{1,n}$, и, может быть, в точках a и b. Кроме того, пусть $F'(x) = f(x)$ за исключением точек разрыва. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) + \sum_{i=1}^{n}\Big[F(c_i-0) - F(c_i+0)\Big].$$

31.1. *(2219, 2222, 2223, 2226, 2230)*

С помощью определённых интегралов найдите пределы следующих сумм:

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{n^2}$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{n}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p,\ \ p>0$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{k\cdot n}}$

(д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$, f *интегрируемая на* $[a;b]$ *функция*;

31.2. *(2211, 2213, 2239, 2242, 2243, 2245, 2246, 2249, 2269, 2279, 2218)*

Найдите следующие определённые интегралы:

(а) • $\displaystyle\int\limits_0^2 |x-1|\,dx;$

(б) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}, \quad (0\leqslant\varepsilon<1);$

(в) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx;$

(г) $\displaystyle\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx\ ;$

(д) $\displaystyle\int\limits_0^1 \arccos x\,dx\ ;$

(е) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}\ ;$

(ж) $\displaystyle\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad (a>0);$

(з) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx\ ;$

(и) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}\ ;$

(к) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx\ ;$

(л) $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx\ ;$

(м) • $\displaystyle\int\limits_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx\ ;$

(н) $\displaystyle\int\limits_0^1 e^x\ \arcsin e^{-x}\,dx\ ;$

(о) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}\ ;$

(п) $\displaystyle\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx\ .$

31.3. *(2309, 2310, 2311, 2313, 2315)*

Вычислите определённые интегралы от ограниченных разрывных функций:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx\ ;$

(б) • $\displaystyle\int\limits_0^2 \left[e^x\right]dx\ ;$

(в) $\displaystyle\int\limits_0^6 [x]\,\sin\frac{\pi x}{6}\,dx\ ;$

(г) • $\displaystyle\int\limits_1^{n+1} \ln{[x]}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}\ ;$

(д) $\displaystyle\int\limits_{\{E\}} |\cos x|\cdot\sqrt{\sin x}\,dx,$ $\quad \{E\}-$ *множество тех значений отрезка* $[0;4\pi]$, *для которых подынтегральная функция имеет смысл;*

(е) $\displaystyle\int\limits_0^{4\pi} x\operatorname{sgn}(sinx)\,dx;$

(ж) Докажите, что $\displaystyle\int\limits_1^{n+1}\frac{\sin\pi x}{[x]}dx = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}, \ \ n\in\mathbb{N}.$

31.4. *(2257)*

Докажите, что если функция f непрерывна на $(0;1)$, то

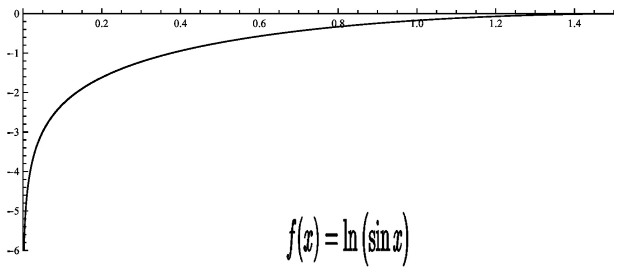
(а) • $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

<u>**Замечание**</u> Предполагается, что все данные интегралы существуют.

31.5. Используя технику из предыдущего номера, найдите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;

(б) • $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\big(\sin x\big)\,dx$.



31.6. Вычислите интеграл $I_n = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ для $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и докажите *формулу Валлиса*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

31.7. Вычислите *интеграл Дирихле*: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin\,(2n-1)x}{\sin x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

31.8. Докажите равенство: $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$

31.9. Найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos ax\cdot(\cos x)^{a-2}dx, \quad a>1$;

(в) ⋆ $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N};$ *(г)* ⋆ $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\big(1+2^x\big)\sin x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$

31.10. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-a;a]$ и чётна. Докажите, что:

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx = \int\limits_0^{a} f(x)\,dx.$$

31.11.

(а) $\star$ Зная, что $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$, вычислите интеграл: $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,dx$.

(б) $\star$ Найдите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

31.12. $\star$

(а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2} = \frac{\pi}{4}$.

(б) Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$– последовательность положительных вещественных чисел таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Найдите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n} + \varepsilon_n\right)$.

31.13. $\star$ Определим *классические многочлены Лежандра*, следующим образом: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$. Докажите, что для любых натуральных m и n выполняется равенство:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn},$$

где δ_{mn} - *символ Кронекера*.

31.14. $\star$ Докажите, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n выполнено: $\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\,dx = n^4$. Найдите сумму: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

31.15. $\star$ Пусть $C(\alpha)$– коэффициент при x^{2012} в разложении по формуле Маклорена функции $(1+x)^\alpha$. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1} + \ldots + \frac{1}{y+2012}\right)\,dy.$$

31.16. $\star$ Определите все непрерывные на $[0;+\infty)$ и положительные на $(0;+\infty)$ функции, удовлетворяющие для $\forall x > 0$ условию:

(а) $2x \int\limits_0^x f(t)dt = f(x)$;

(б) $\sin\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right) = \frac{x}{1+x}$.

31.17. $\star$ Пусть $h(x) \in C[a,\,b]$, $h(x) > 0$ и $h_n = \int\limits_a^b x^n h(x)\,dx$. Докажите, что при любом натуральном m:

$$\mathbf{det} \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \ldots & h_{m-2} & h_{m-1} \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_{m-1} & h_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m-2} & h_{m-1} & \ldots & h_{2m-4} & h_{2m-3} \\ h_{m-1} & h_m & \ldots & h_{2m-3} & h_{2m-2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оценки интегралов. Теоремы о среднем

Определение: Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, тогда выражение $M[f] = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *средним значением функции f на $[a;b]$.*

Утверждение: Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $\exists \xi \in (a;b)$, такое что $M[f] = f(\xi)$.

Теорема *(Первая теорема о среднем)*: Пусть выполнено:

1. f и φ интегрируемы на $[a;b]$;
2. φ знакопостоянна на $[a;b]$;

   Тогда $\exists \mu \in \left[\inf\limits_{[a;b]} f(x);\, \sup\limits_{[a;b]} f(x)\right]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.
3. если, дополнительно, функция f непрерывна на $[a;b]$, то $\exists \xi \in [a;b]$, такое что $\mu = f(\xi)$.

Теорема *(Вторая теорема о среднем)*: Пусть выполнено:

1. f и φ интегрируемы на $[a;b]$;
2. φ монотонна на $[a;b]$;

   Тогда $\exists \xi \in [a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$.
3. если $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \searrow$, то $\exists \xi_1 \in [a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx$.
4. если $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \nearrow$, то $\exists \xi_2 \in [a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int\limits_{\xi_2}^b f(x)\,dx$.

Замечание: Последние две формулы иногда называют *формулами Бонне.*

32.1. *(2316)* Определите знаки следующих определённых интегралов:

(а) $\int\limits_0^{2\pi} x\,\sin x\,dx$; *(б)* • $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$; *(в)* $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$;

(г) $\int\limits_0^{2\pi} x^a\,\sin x\,dx, \quad a > 0$; *(д)* $\int\limits_0^{2\pi} x^{a+1}\,\cos x\,dx, \quad a > 0$.

32.2. *(2317)* Определите, какой интеграл больше:

(а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$ или $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; *(б)* $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$;

(в) • $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ или $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

32.3. *(2319)* Найдите среднее значение функции f на заданном сегменте:

(а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-1;2]$; *(б)* • $f(x) = \sin x \cdot \sin(x+\varphi)$ на $[0;2\pi]$;

(в) $f(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$ на $[0;2]$;

(г) • $f(x) = \dfrac{\rho}{1-\varepsilon\cos x}$ на $[0;2\pi]$, $0<\varepsilon<1$ (ε - *среднее значение длины фокального радиуса вектора эллипса*).

32.4. *(2323, 2324, 3228, 2330)*

Пользуясь теоремами о среднем, оцените интегралы:

(а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+0,5\,\cos x}$; *(б)* • $\int\limits_0^1 \dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$; *(в)* $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$;

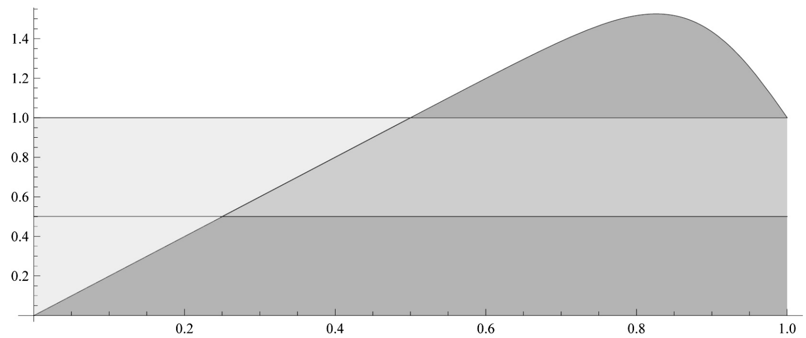
(г) $\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$, $(0<a<b)$; *(д)* $\int\limits_a^b \dfrac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx$, $(\alpha \geqslant 0,\ 0<a<b)$;

32.5. Докажите следующие неравенства:

(а) $\dfrac{1}{20\sqrt{2}} < \int\limits_0^1 \dfrac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \dfrac{1}{20}$;

(б) • $\dfrac{1}{2} < \int\limits_0^1 \dfrac{2x}{1+x^{13}}\,dx < 1$;

(в) $\dfrac{1}{2} < \int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \dfrac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{N}$;



$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^{13}}$

(г) $\dfrac{2}{3} < \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx < \dfrac{\pi}{4}$; *(д)* $\dfrac{4}{9}(e-1) < \int\limits_0^1 \dfrac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx < \dfrac{1}{2}(e-1)$.

32.6. *(2322)* Пусть $\int\limits_0^x f(t)\,dt = x\,f(\theta\cdot x)$. Найти θ, если:

(а) $f(t)=t^n$, $(n>-1)$; *(б)* $f(t)=\ln t$;

(в) $f(t)=e^t$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=?$, $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=?$

32.7. *(2321, 2233)*

(а) • Пусть f непрерывна на $[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Рассмотрите пример $f(x)=\mathrm{arctg}x$.

(б) Пусть f непрерывна на $[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx$;

(в) Пусть f и g непрерывны на $[0;+\infty)$, причём $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot g(x) = b$. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(g(x)\cdot\int\limits_0^x f(t)\,dt\Big)$;

(г) Приведите пример непрерывной на $[0;+\infty)$ функции g, для которой существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big[\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)\,dt\Big]$, но не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$;

(д) Пусть функции f и g непрерывны на $[0;1)$, причём:

1) для $\forall x\in[0;1]$ $g(x)>0$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to1-0}\int\limits_0^x g(t)\,dt=+\infty$; ***3)*** $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=a$.

Докажите, что $\lim\limits_{x\to1-0}\int\limits_0^x f(t)\,dt\cdot\left(\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)^{-1} = a.$

32.8. *(2332)*

(а) Пусть f непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция, $f(a)=0$, $M=\sup\limits_{[a;b]}|f(x)|$. Докажите, что

$$M^2\leqslant(b-a)\int\limits_a^b [f'(x)]^2\,dx.$$

(б) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и найдутся такие числа $M,\delta>0$, что для любых α,β $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$ выполнено: $\left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx\right|\leqslant M\cdot|\beta-\alpha|^{1+\delta}$. Докажите, что $f(x)\equiv0$ на $[a;\,b]$.

32.9. Вычислите пределы:

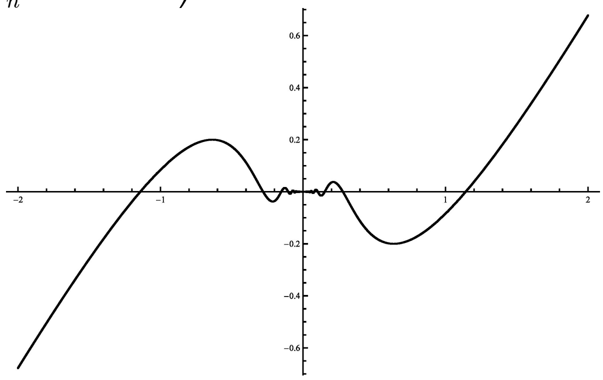
(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx;$

(б) • $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \dfrac{f(x)}{x}\, dx,$ *где* $a > 0,$ $b > 0$ и $f(x)-$ *непрерывна на* $[0;1]$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \dfrac{\sin x}{x}\, dx,$ $p > 0;$ *(г)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4 \int\limits_n^{n+1} \dfrac{x}{1+x^5}\, dx \right).$

32.10. $\star$ Пусть $f(x) = \begin{cases} \cos 1/x, & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$

и $F(x) := \int\limits_0^x f(u)\, du,$ $x \geqslant 0$. Вычислите $F'(0)$.



32.11. $\star$ Найдите предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 u^{a-1} \ln u\, du$ для положительного a.

32.12. $\star$ Пусть f и g – две непрерывные функции, переводящие отрезок $[0;1]$ в отрезок $[0;1]$. Причём известно, что f строго возрастает. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f\big(g(x)\big)\, dx \leqslant \int\limits_0^1 \big(f(x) + g(x)\big)\, dx.$$

32.13. $\star$ Пусть f – непрерывная функция, действующая из $[0;1]$ в $\mathbb{R}$ такая, что для $\forall x, y \in [0;1]$ выполняется неравенство: $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$.

(а) Докажите, что $\int\limits_0^1 f(x)dx \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

(б) Найдите функцию, которая данное неравенство обращает в тождество.

32.14. $\star$ Пусть $0 < a < b$. Докажите, что $\int\limits_a^b (x^2+1)\, e^{-x^2} dx \geqslant e^{-a^2} - e^{-b^2}.$

32.15. $\star$ Для возрастающих функций $f, g : [0;\pi/2] \mapsto \mathbb{R}$ докажите неравенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)g(x)\sin x\, dx \geqslant \int\limits_0^{\pi/2} f(x)\sin x\, dx \cdot \int\limits_0^{\pi/2} g(x)\sin x\, dx.$$

Определение: Пусть для $\forall b \in \mathbb{R}$ функция f интегрируема на [a;b].

Несобственным интегралом первого рода называется выражение

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если данный предел существует, то несобственный интеграл сходится ($\longrightarrow$), иначе - расходится ($\not\longrightarrow$).

Определение: Пусть для $\forall\varepsilon > 0$ функция f интегрируема на $[a; b-\varepsilon]$ и пусть $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. *Несобственным интегралом второго рода* называется выражение

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Сходимость/расходимость определяются аналогично.

Замечание: Заменой $t = \dfrac{1}{x-b}$ несобственный интеграл второго рода преобразовывается в несобственный интеграл первого рода. При этом особенность второго рода преобразуется в особенность первого рода.

Теорема (*критерий Коши*): Интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists b(\varepsilon)>a\ :\ \forall b', b''>b \Rightarrow \left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема (*первый признак сравнения*): Пусть $|f(x)| \leqslant F(x)$, для $\forall x \geqslant a$ и $\int\limits_a^{\infty} F(x)\,dx$ сходится, тогда и $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Если же $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и $\int\limits_a^{\infty} F(x)\,dx$ расходится.

Теорема (*второй признак сравнения*): Пусть выполнено $f(x), F(x) \geqslant 0$ при $x \in [a; +\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{F(x)} = k$, тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $0<k<+\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty} F(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

2) Если $k=0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} F(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

3) Если $k=+\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} F(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

Теорема (*частный признак сравнения*):

1. Пусть $f(x) = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty$, тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx \longrightarrow$ при $p > 1$, и $\not\longrightarrow$ если $p \leqslant 1$.

2. Пусть $f(x) = \mathrm{O}^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ при $x \to b-0$, тогда $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx \longrightarrow$ при $p < 1$, и $\not\longrightarrow$ при $p \geqslant 1$.

Теорема (*признак Дирихле*): Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Пусть выполнено:

1. Функция g интегрируема на $[a;+\infty)$ и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$;
2. f интегрируема в любом конечном сегменте $[a;x]$, причём $\exists M > 0 : \forall x \geqslant a$ $|F(x)| = \left|\int\limits_a^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant M$ (первообразная функции f ограничена).

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится.

Теорема (*признак Абеля*): Пусть функции f и g определены в $[a;+\infty)$, причём:

1. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;
2. Функция g монотонна и ограничена.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится.

33.1. Найдите все значения параметра α, при которых сходятся интегралы:

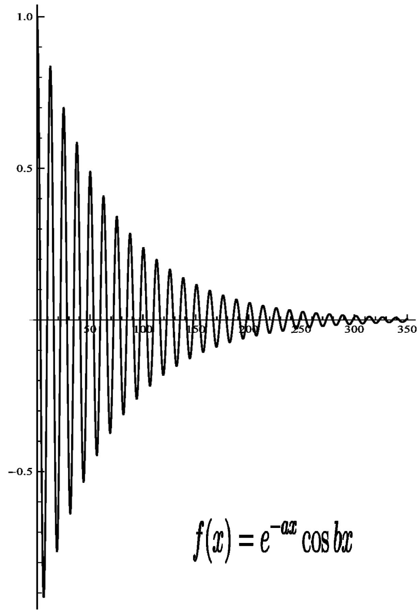
(а) • $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$; *(б)* $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$;

33.2. Найдите все значения параметров α и β, при которых сходятся интегралы:

(а) • $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$; *(б)* $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$;

(в) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin(nx+l)}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx, \quad n \neq 0.$

33.3. *(2346,2347)* Докажите сходимость и вычислите интегралы:



(а) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$; *(б)* • $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx, \quad a>0$;

(в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx, \quad a>0$;

(г) $\int\limits_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$; *(д)* $\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,\sin x\,dx$.

33.4. Докажите сходимость следующих интегралов:

(а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$; *(б)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$;

(в) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$; *(г)* • $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$;

(д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx$; *(е)* $\int\limits_0^{1} f(x)\,dx$, где $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}, & x\neq 0;\\ \sqrt{2}, & x=0,\end{cases}$

33.5. Найдите все α, при которых сходится интеграл:

(а) • $\int\limits_{-1}^{1} (1-x^6)^\alpha\,dx$; *(б)* $\int\limits_0^{+\infty} \ln^\alpha(\operatorname{ch} x)\cdot\arcsin\frac{2x}{3+x^2}\,dx$;

(в) $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha(x^2-x^3)}{(\ln x)^2(\cos\frac{\pi x}{2})^{2\alpha-1}}\,dx$;

33.6. *(2363,2364,2366,2371)*

Исследуйте сходимость интегралов:

(а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx, \quad n>0$; *(б)* • $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx, \quad a\neq 0$;

(в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx, \quad n\geqslant 0$; *(г)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$; *(д)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$.

33.7. *(2357)* Найдите следующие пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0+0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1}\,dt}{\ln(1/x)}$;

33.8. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ не зависит от величины α.

33.9. ⋆ Пусть φ и ψ – взаимно обратные, непрерывные, монотонно убывающие функции на $(0;+\infty)$, причём

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)\,dt \;=\; \int\limits_0^\infty \psi(t)\,dt \;=\; a<\infty, \quad a>0.$$

Докажите, что

$$\int\limits_0^\infty \varphi^2(t)\,dt \;+\; \int\limits_0^\infty \psi^2(t)\,dt \;\geqslant\; \frac{a^{3/2}}{2}.$$

33.10. ⋆ Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\int\limits_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n}\,dt \qquad (m,\, n\in\mathbb{N})$.

33.11. Найдите, не используя правило Лопиталя, следующий предел:

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{A}}\int\limits_1^A \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx.$$

33.12. ⋆ Пусть при $x\geqslant 0$ функция f монотонна и несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ существует. Докажите, что тогда

$$\lim_{h\to 0+0} h\big[f(h)+f(2h)+f(3h)+\ldots\big] = \int\limits_0^\infty f(x)dx.$$

34.1. • *(аналог формулы интегрирования по частям для несобственного интеграла)*

Пусть f и g - непрерывно дифференцируемые на луче $[a;+\infty)$ функции, один из интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f'(x)\,g(x)\,dx$ сходится, и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\,g(x)\big)$. Докажите сходимость второго из интегралов и справедливость формулы:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\,g(x)\big) - f(a)\,g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)\,g(x)\,dx$$

34.2. Вычислите интегралы:

(а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$; *(г)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$;

34.3. *(2370, 2377, 2369, 2361)*

Исследуйте сходимость интегралов:

(а) • $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$;

(б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ - взаимно простые (т.е. не имеющие общих корней) многочлены степеней m и n соответственно;

(в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\,\cos^q x}$; *(г)* • $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^p}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^p}\,dx$; *(е)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\,e^{-x}\,dx$.

34.4. Докажите расходимость следующих интегралов, используя критерий Коши:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}$; *(б)* • $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \quad p \leqslant 0.$

34.5. *(2372, 2373, 2375)*

Исследуйте сходимость интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$; *(г)* $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\ \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha > 0.$

34.6. Пусть a, k, $\lambda > 0$. Используйте признаки Дирихле и Абеля для исследования сходимости следующих интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cdot\sin ax}{k^2+x^2}\,dx$;

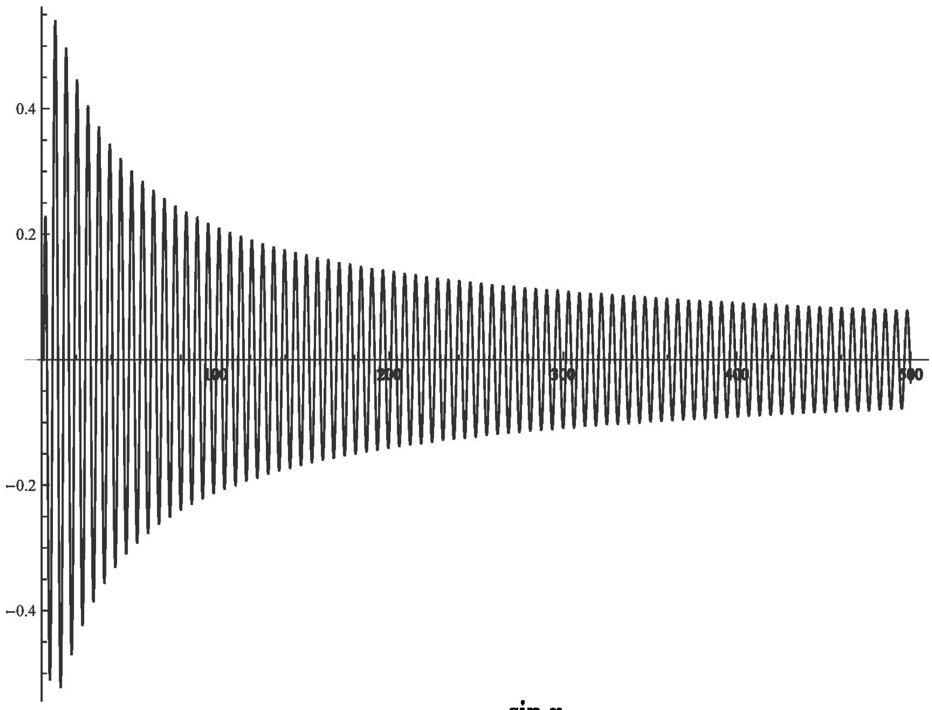
(б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\,\frac{\sin 2x}{x^\lambda}\,dx$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} |\ln x|^\lambda\,\frac{\sin x}{x}\,dx$;

(г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2+x)}{x^\lambda}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$;

(е) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{1}{2x^3+1}\right)dx$;



$y = (\ln x)^2\,\dfrac{\sin x}{x}$

34.7. • Найдите все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}+x^{3/4}}\sqrt{e^{\alpha x}-1-\alpha x}\,dx.$$

34.8. Исследуйте на сходимость в зависимости от значений параметра $p > 0$ интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx.$$

Замечание: Этот пример, в случае $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, поучительно сопоставить с признаком Дирихле. Первообразная от $\sin x$ ограничена. Множитель $\dfrac{1}{x^p + \sin x}$ стремится к 0 при $x \to \infty$ (но немонотонно!) и интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx$ расходится.

34.9. *(3789) (формула Фруллани)*

Пусть f – непрерывная функция и интеграл $\displaystyle\int\limits_{A}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ имеет смысл при любом $A > 0$. Докажите справедливость следующего тождества:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \;=\; f(0) \ln \frac{b}{a}\,, \quad (a > 0,\, b > 0).$$

34.10. $\star$ (вычисление *интеграла Фруллани*)

Пусть f – непрерывная функция. Опираясь на результат предыдущего номера, вычислите интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx, \quad (a > 0,\, b > 0),$$

если

(а) при некотором $T > 0$ для всех $x \geqslant 0$ справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$;

(б) существует конечный предел $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

34.11. Пусть $a, b > 0,\ n > 0$. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a\, x^n) - \operatorname{arctg}(b\, x^n)}{x} dx.$

34.12. $\star$ Пусть функция u удовлетворяет следующим требованиям:

1) функция u непрерывно дифференцируема на луче $(0;\, +\infty)$;

2) $u(x) > 0, \quad u'(x) > 0$; 3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{u(x) + u'(x)}$ сходится;

Докажите, что интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{u(x)}$ сходится.

34.13. $\star$ Исследуйте сходимость интеграла:

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} x\,|\sin x|^{x^2}\,dx.$$

34.14. $\star$ Найдите положительные действительные пары чисел a и b, для которых сходится интеграл:

$$\int\limits_{b}^{+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)dx.$$

34.15. $\star$ Пусть f – положительная непрерывно дифференцируемая функция на интервале $(0;+\infty)$. Докажите, что интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)}\,dx$ расходится к бесконечности.

34.16. $\star$ Пусть интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен I. Докажите, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

также сходится и равен I.

34.17. $\star$ Существует ли непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0;2]$ функция f, удовлетворяющая следующим условиям:

$$f(0)=f(2)=1,\quad |f'(x)|\leqslant 1,\quad \left|\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx\right|\leqslant 1?$$

34.18. $\star$ Пусть $f:[0,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$ равномерно непрерывная функция. Известно, что интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Определение: Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \xrightarrow{\text{абс}}$.

Замечание: Важно отметить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ должен быть определен, т.е. для $\forall A > a$ функция f интегрируема на отрезке $[a; A]$.

Определение: Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится условно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \xrightarrow{\text{усл}}$.

Утверждение: Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Рассмотрим задачу исследования на абсолютную и условную сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\,\alpha)\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}-$ параметр. Это означает определение трёх множеств:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ =\ \mathbb{R},\ \ A_i \cap A_j = \{\varnothing\},$$

где при $\alpha \in A_1$ изучаемый интеграл сходится абсолютно, при $\alpha \in A_2$ сходится условно и при $\alpha \in A_3$ расходится.

Определение: Если функция f такова, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы:

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \ \text{ и } \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (a < c < b),$$

то под *главным значением в смысле Коши* (***v.p.***) понимается число

$$\boldsymbol{v.p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx \ =\ \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Аналогично

$$\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \ =\ \lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx;$$

35.1. *(2380, 2381, 2383)*

Исследуйте на абсолютную и условную сходимости интегралы, зависящие от действительнозначных параметров:

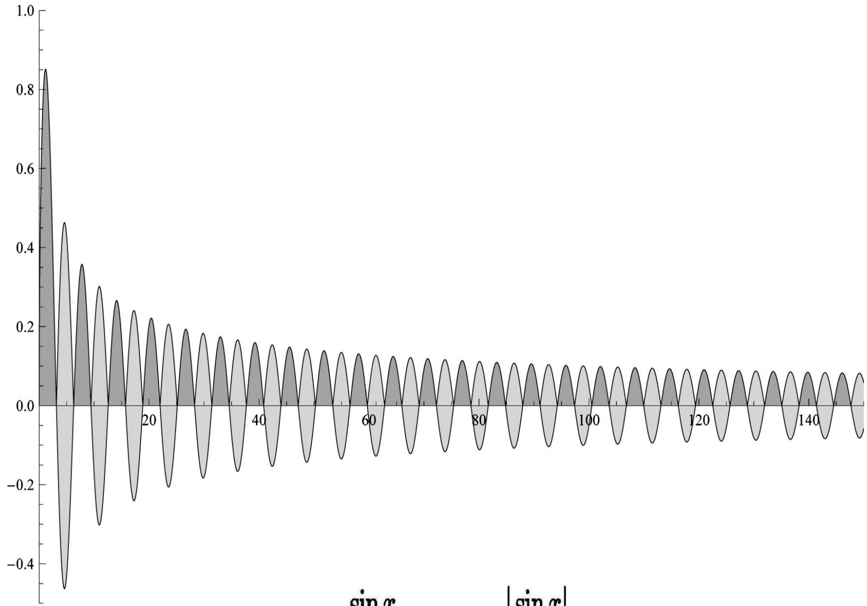
(а) • $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx;$

(б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x^p \sin x^q\, dx, \quad q \neq 0;$

(в) • $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\, dx, \quad q \geqslant 0;$

(г) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, \cos x}{x^{\alpha}}\, dx;$

(д) $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sin(3x-6)}{(x-\ln(x-1)-2)^{\alpha}}\, dx;$



$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$

(е) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos(1/x^2)}{x^p}\, dx;$

(ж) $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\, \sin x\, dx,$ где $P_m(x)$ и $P_n(x)$—целые многочлены и $P_n(x) > 0$, если $x \geqslant a \geqslant 0$.

35.2. *(2379, 2380)*

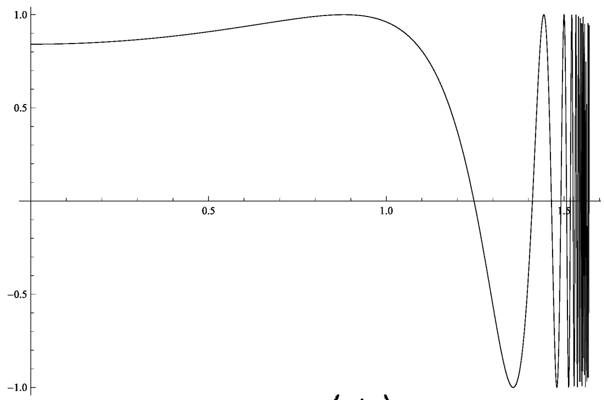
Исследуйте на абсолютную и условную сходимости следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\, dx;$

(б) • $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx;$

(в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\, dx;$

(г) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \sin\left(x^2-x\right) dx;$



$f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

__Замечание:__ Делать подстановку $t = x^2 - x \in [-\frac{1}{4}; +\infty)$ в исходном интеграле нельзя, т.к. функция $x(t) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{t+\frac{1}{4}}$ имеет неограниченную производную на луче $(-\frac{1}{4}; +\infty)$.

(д) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{dx}{1-x};$ (е) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx;$

35.3.

(а) • Пусть функция f непрерывно дифференцируема на луче $[x_0;\, +\infty)$, $|f'(x)| < C$ при $x \in [x_0;\, +\infty)$ и интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

<u>**Замечание:**</u> Если интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то не обязательно $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Например, это не выполнено для $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ – *интеграл Френеля*. Ясно, что $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x^2$.

(б) Пусть $a \in \mathbb{R}$, для $\forall A > a$ функции f, g интегрируемы на $[a;\, A]$, и интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f^2(x)\, dx$, $\int\limits_{a}^{+\infty} g^2(x)\, dx$ сходятся. Докажите, что интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$ сходится;

(в) Пусть функция f непрерывно дифференцируемая на всей числовой прямой, и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx$ сходится. Докажите, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

(г) Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и сходятся интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f'(x)\big)^2\, dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f''(x)\big)^2\, dx.$$

Докажите равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f'(x)\big)^2\, dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\, f(x)\, dx.$$

35.4. *(2392, 2393, 2395)*

Найдите следующие интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши.

(а) • $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x}$;

(б) $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{1-x^2}$;

(в) $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-3x+2}$;

(г) • $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{1/2}^{2} \dfrac{dx}{x\ln x}$;

(д) $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$;

(е) $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx$;

35.5. Рассмотрим следующую функцию:

$$\widetilde{D}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\widetilde{D}(x)\right| dx$ сходится, однако интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \widetilde{D}(x)\, dx$ расходится, как модификация функции Дирихле. Следовательно, из сходимости *несобственного* интеграла от модуля, вообще говоря, не следует сходимость самого интеграла. Обоснуйте или опровергните получившийся результат.

35.6. $\star$ Пусть функция f непрерывна и $2T$ – периодична (2T>0) на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Кроме этого, пусть $\int\limits_0^T f(x)dx > 0$, а $\int\limits_0^{2T} f(x)dx = 0$. Докажите, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x}\, dx$$

сходится условно.

35.7. $\star$ Пусть для дважды непрерывно дифференцируемой на луче $[a; +\infty)$ функции f сходятся интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f^2(x)\, dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} \left(f''(x)\right)^2 dx$$

и

$$\exists L \in \mathbb{R} \;:\; \forall x \geqslant a \;\Rightarrow\; |f(x)\, f'(x)| \leqslant L.$$

Докажите сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \left(f'(x)\right)^2 dx$.

35.8. $\star$ Пусть функция f – непрерывна на отрезке $[0; 1]$. Докажите справедливость следующего тождества:

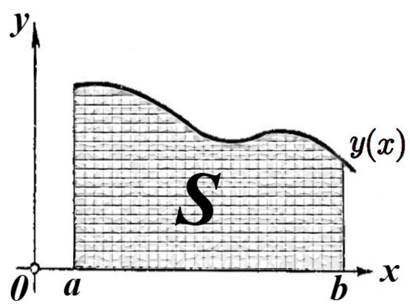
$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} = \max_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

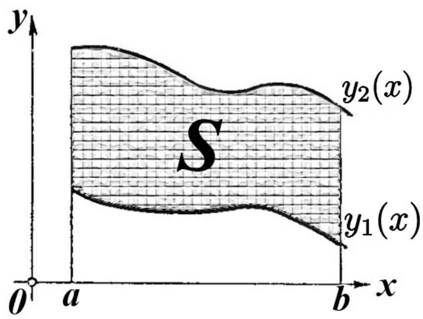
35.9. $\star$ Пусть f непрерывна на сегменте $[0, 1]$. Найдите предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} \ln \int\limits_0^1 \operatorname{ch}\left(tf(x)\right) dx.$

35.10. $\star$ Исследуйте сходимость интеграла: $\int\limits_0^{+\infty} \sin x \, \sin x^2\, dx.$

Вычисление площадей плоских фигур

1. ***Площадь в декартовых прямоугольных координатах.***





y – *непрерывна на* $[a;b]$; $y(x)>0$;

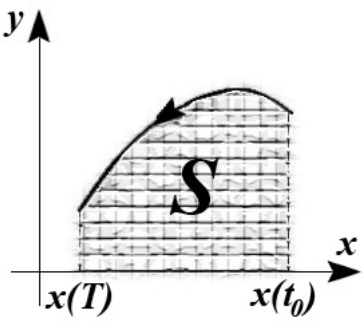
$$S=\int\limits_a^b y(x)\,dx.$$

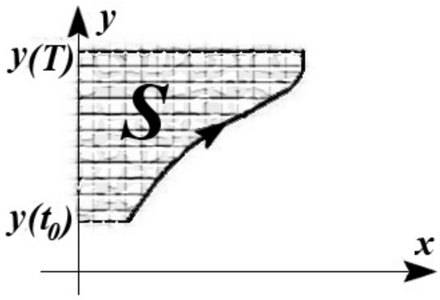
y_1,y_2 – *непрерывны на* $[a;b]$; $y_2(x)-y_1(x)>0$;

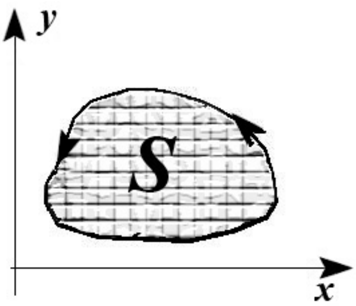
$$S=\int\limits_a^b \big(y_2(x)-y_1(x)\big)\,dx.$$

2. ***Площадь фигуры, заданной параметрически.***

$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[t_0;T]$. $x(t),y(t)$– *непрерывно дифференцируемые на* $[t_0;T]$ *функции.*





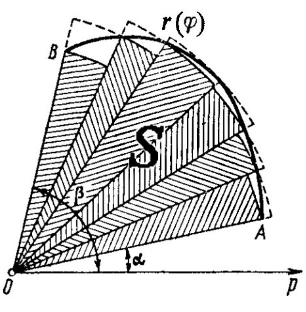


$$S=-\int\limits_{t_0}^{T} y(t)\,x'(t)\,dt;$$

$$S=\int\limits_{t_0}^{T} x(t)\,y'(t)\,dt;$$

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}\big(x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t)\big)\,dt.$$

3. ***Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат.***



$$F=\big\{(r;\varphi)\,|\,0\leqslant r\leqslant r(\varphi);\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\big\},\qquad S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

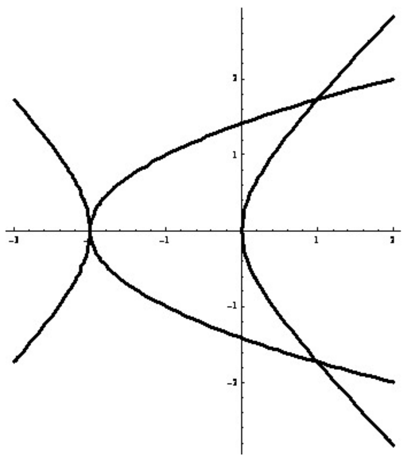
$$F=\big\{(r;\varphi)\,|\,0\leqslant\varphi\leqslant\varphi(r);\ \rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2\big\},\quad S=\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} r^2\cdot\varphi'(r)\,dr.$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

36.1. *(2397, 2402)*

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

(а) • $ax = y^2, \;\; ay = x^2$;



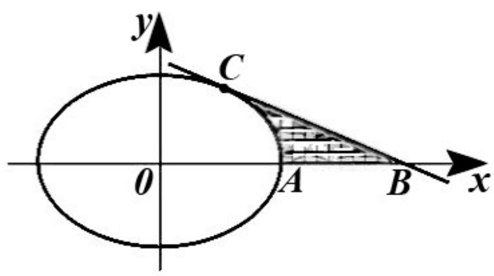
(б) $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}, \;\; y = 0$;

(в) • $y = \dfrac{2}{\pi}x, \;\; y = 0, \;\; y = \sin x \quad (0 < x < \pi)$;

(г) $y = e^{-x}\,|\sin x|, \;\; y = 0 \quad (x \geqslant 0)$;

(д) • $x^2 + 2ax - y^2 = 0, \;\; ax - y^2 + 2a^2 = 0$;

(е) • к *эллипсу* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ проведена касательная в точке $C\left(\frac{a}{2}; \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$. Найти площадь криволинейного $\triangle ABC$;



(ж) найдите площадь *эллипса*, заданного уравнением:

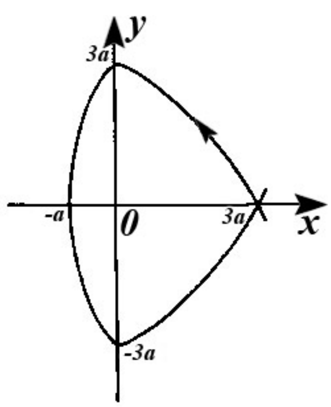
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0, \; C > 0).$$

36.2. Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

(а) $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi; \;\; y = 0 \quad$ *(циклоида)*;

(б) $x = a\sin t, \;\; y = a\sin 2t, \quad$ *(кривая Лиссажу)*;

(в) • $\;x = a(t^2 - 2t), \;\; y = a(t^2 - 1)(t - 3)$;



(г) $x = a\dfrac{t^2}{1 + t^4}, \;\; y = a\dfrac{t^3}{1 + t^4}$;

(д) $x = a\sin t\cos^2 t, \;\; y = a\cos t\sin^2 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

36.3. *(2418, 2424, 2423)*

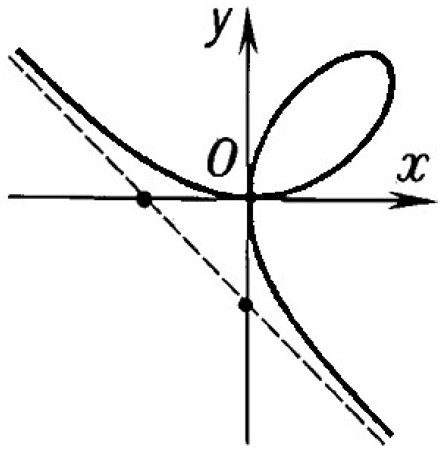
Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

(а) • $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ *(лемниската)*;

(б) $\varphi = r \operatorname{arctg} r,\ \ \varphi = 0,\ \ \varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$;

(в) $r_1 = a\cos\varphi,\ \ r_2 = a(\cos\varphi + \sin\varphi),\ \ \Big(M(a/2;\,0) \in \mathbf{S}\Big)$;

36.4. Приведя уравнения к параметрическому виду, найдите площади фигур, ограниченных кривыми:



(а) • $x^3 + y^3 = 3axy$ *(лист Декарта)*;

(б) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *(астроида)*;

(в) $x^4 + y^4 = ax^2y$.

36.5. *(2426, 2428)*

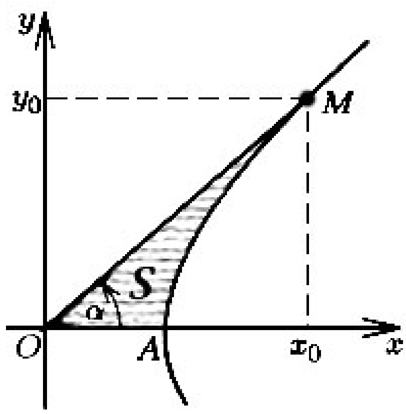
Перейдя к полярным координатам, найдите площади фигур, ограниченных кривыми:

(а) $x^3 + y^3 = 3axy$;

(б) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ *(лемниската)*;

(в) • на гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$ дана точка $M(x_0;\,y_0)$.

Найдите площадь криволинейного треугольника $\triangle OAM$.



36.6. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 3x \geqslant 0; \\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 2 - \sqrt{x}, \end{cases}$$

(а) используя понятие интеграла;

(б) без использования понятия интеграла.

36.7. $\star$

(а) Вычислите площадь, ограниченную кривыми:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), \quad x^2+y^2 \geqslant a^2;$$

(б) Найдите кривую, для которой площадь сектора, ограниченного этой кривой и полярными радиусами $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$, вычисляется по формуле: $S = \dfrac{1}{4}r^2(\varphi_0)$.

36.8. Дано параметрическое уравнение эллипса: $x = 2\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $a = 2$, $b = 1-$ его полуоси. Зная, что $\rho^2 = x^2+y^2$, студент вычисляет площадь *эллипса* так:

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \rho^2 d\varphi\right) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi \;=\; \frac{5\pi}{2}.$$

Известно, однако, что $S = \pi ab = 2\pi$. В чём ошибка студента?

36.9. $\star$ Докажите, что при $a, b \geqslant 1$ выполняется неравенство:

$$a\,b \leqslant e^{a-1} + b\,\ln b.$$

36.10. $\star$

(а) Найдите кривую $r = r(\varphi)$, для которой площадь S сектора, ограниченного этой кривой и полярными лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = a$, вычисляется для любого $\alpha \in (0;\pi)$ по формуле:

$$1)\ S = ar^n(\alpha), \quad n > 2; \qquad 2)\ S = kr^2(\alpha) - S_0 \quad (k > 0,\ S_0 > 0).$$

(б) Функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и положительна при $x > 0$. Пусть $S(c)$ — площадь фигуры, ограниченной осями координат, прямой $x = c$ и графиком функции $y = f(x)$. Найдите $f(x)$, если $S(c) = \alpha c f(c)$ для любого $c > 0$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Вычисление длин дуг кривых

1. ***Длина дуги в прямоугольных координатах.***

   Длина дуги отрезка непрерывно дифференцируемой кривой $y = y(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ вычисляется по формуле:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \tag{1}$$

   Если кривая задана уравнением $x = x(y)$, $(c \leqslant y \leqslant d)$, то данная формула преобразуется в:

$$L = \int\limits_c^d \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy. \tag{2}$$

2. ***Длина дуги кривой, заданной параметрически.***

   Если кривая C задана уравнениями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0; T],$

где $x(t), y(t)$—непрерывно дифференцируемы на $[t_0; T]$, то длина дуги кривой C равна:

$$L = \int\limits_{t_0}^T \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \tag{3}$$

3. ***Длина дуги в полярных координатах.***

   Если кривая C задана уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, где

$r(\varphi)$— непрерывно дифференцируемая на $[\alpha; \beta]$ функция, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна:

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} d\varphi. \tag{4}$$

Замечание: При решении подобного рода задач часто возникают следующие интегралы:

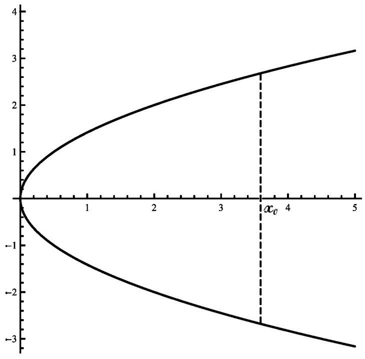
$$\int \sqrt{x^2 \pm 1}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm 1} \pm \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C, \quad \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

37.1. *(2432, 2435, 2436, 2438)*

Найдите длины дуг, заданных в декартовых координатах:



(а) • $y^2 = 2px, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0;$

(б) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y, \quad 1 \leqslant y \leqslant e;$

(в) $y = a \cdot \ln \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant b < a;$

(г) $x = a \cdot \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 < b \leqslant y \leqslant a;$

(д) $y = \ln(1 + \cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

(е) • $y = \dfrac{1}{2}\Big(\ln(\cos x) + \ln(\sin x)\Big), \quad \dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}.$

37.2. *(2440, 2442, 2443)*

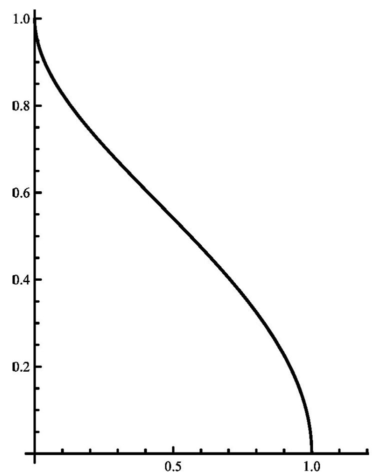
Найдите длины дуг следующих кривых:

(а) • $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *(астроида)*;

(б) $x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t;$

(в) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

(г) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln \pi.$



$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t$

37.3. *(2446, 2448, 2450, 2452)*

Найдите длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат:

(а) • $r = a\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ *(спираль Архимеда)*;

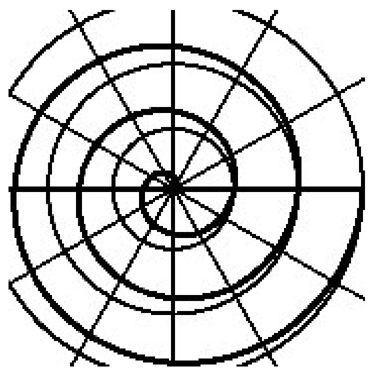
(б) $r = a(1 + \cos\varphi)$ *(кардиоида)*;

(в) $r = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3};$

(г) $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right), \quad 1 \leqslant r \leqslant 3;$

(д) $\varphi = \sqrt{r}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 5;$

(е) $r = \dfrac{1}{1 + \cos\varphi}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$



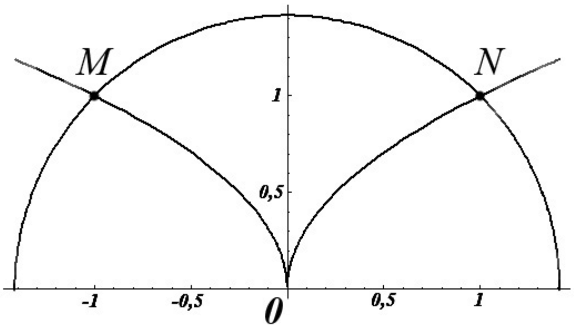
37.4.

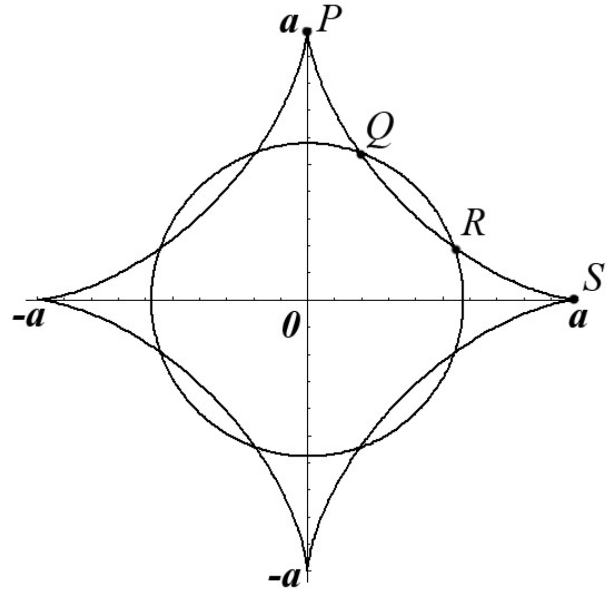
(а) • Найдите периметр криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ и графиком функции $y = \sqrt{|x|}$;

(б) • Найдите радиус окружности с центром в начале координат, которая делит дугу *астроиды*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \ \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0$$

на три дуги равной длины.





37.5. Найдите длину дуги кривой $r = u \cdot e^{2u}, \ \ \varphi = u^2 + 2u, \ \ 0 \leqslant u \leqslant 2.$

37.6. Найдите длину дуги пространственной кривой:

(а) $x = t \sin t, \ \ y = t \cos t, \ \ z = \dfrac{2t\sqrt{2t}}{3}$ от точки $A(0;\,0;\,0)$ до точки $B\left(0;\,2\pi;\,\dfrac{8\pi\sqrt{\pi}}{3}\right)$;

(б) $x^2 = 2az - z^2, \ \ y = a \ln\left(1 - \dfrac{z}{2a}\right), \quad 0 \leqslant z \leqslant z_0 < 2a.$

37.7. • Найдите длину дуги *эллипса*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < b < a.$

37.8. Найдите длину неявно заданной кривой:

(а) $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$;

(б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

37.9. $\star$

(а) Докажите, что длина эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ a>0,\ b>0$, равна длине синусоиды $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\dfrac{x}{b},\ \ 0\leqslant x\leqslant 2\pi b$;

(б) Докажите, что длина s эллипса с полуосями a и b удовлетворяет неравенствам

$$\pi(a+b)<s<\pi\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

37.10. $\star$ При каких рациональных числах α ($\alpha\neq 0$) длина дуги кривой

$$y=ax^{\alpha},\ \ 0<x_0\leqslant x\leqslant t,$$

является элементарной функцией от t?

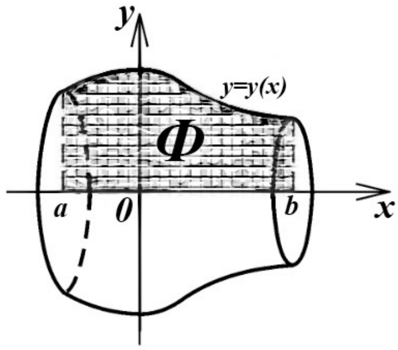
37.11. $\star$ Найти в первом квадранте $x>0,\ \ y>0$ гладкую кривую, выходящую из точки $(a;0)$, у которой длина отрезка любой касательной от точки касания до точки пересечения с осью ординат равна a.

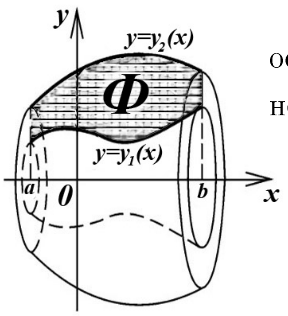
Если объем тела V существует и $S = S(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, то

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{1}$$

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Объём V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Ф, ограниченной графиком функции y, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и отрезком оси Ox, равен

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{2}$$





В более общем случае объём кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $\left\{a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\right\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right] dx. \tag{3}$$

Пусть $y = y(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox, равна

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx. \tag{4}$$

Пусть кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha; \beta]$ функции. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика данной кривой вокруг оси Ox, равна

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{5}$$

<u>**Замечание:**</u> Все параметры в этом листочке считаются положительными.

38.1. *(2463, 2465)* Найдите объём тела, ограниченного поверхностями:

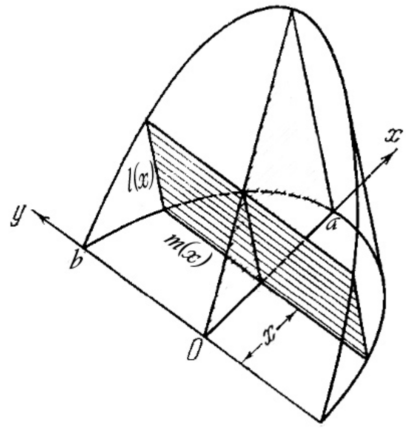
(а) • $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,   *(эллипсоид)*;

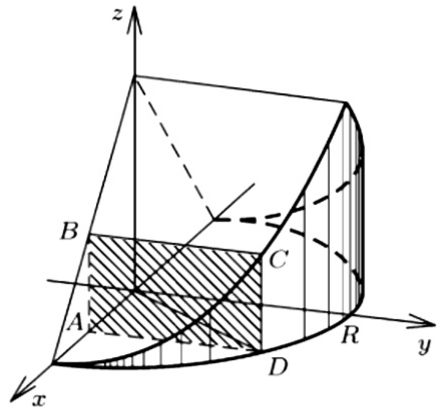
(б) $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$,   *(два прямых круговых цилиндра)*;

38.2. *(2462)* Найдите объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

(а) • $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=\dfrac{c}{a}x$, $z=0$;

(б) $x^2+y^2=R^2$, $\dfrac{x}{R}+\dfrac{z}{H}=1$, $\dfrac{x}{R}-\dfrac{z}{H}=-1$, $y=0$, $z=0$.





38.3. *(2471)* •

Докажите, что объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $\{a\leqslant x\leqslant b;\ \ 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, где y – однозначная непрерывная функция равен:

$$V=2\pi\int\limits_a^b x\cdot y(x)\,dx \tag{6}$$

38.4. *(2472,2473,2479,2480)*

Найдите объёмы тел V_γ, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезками следующих линий вокруг прямой γ:

(а) $y=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}$, $(0\leqslant x\leqslant a)$, $V_{y=0}=?$ *(нейлоид)*;

(б) • $y=2x-x^2$, $y=0$, $V_{y=0}=?$ $V_{x=0}=?$

(в) $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $(0\leqslant x<+\infty)$, $V_{y=0}=?$

(г) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, $y=0$,   *(циклоида)*;

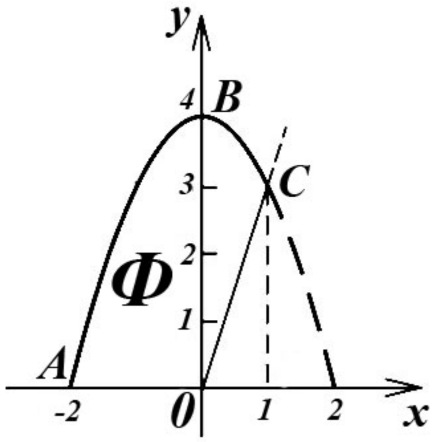
$V_{y=0}=?$ $V_{x=0}=?$ $V_{y=2a}=?$

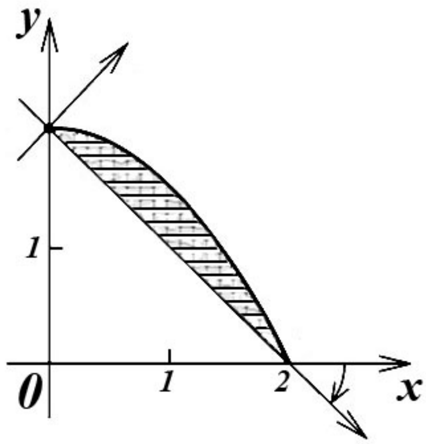
38.5. Найдите объёмы тел, ограниченных поверхностями, образованными вращением следующих линий:

(а) $\bullet$ $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $y = 0$, $V_{y=0} = ?$

(б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $V_{y=0} = ?$ *(астроида)*

(в) $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$, $x + y = 2$ $V_{x+y=2} = ?$





38.6. *(2487,2492)*
Найдите площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

(а) $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b}$, $|x| \leqslant b$, $S_{y=0} = ?$

(б) $\bullet$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $S_{y=0} = ?$

(в) $2ay = x^2 - a^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}\,a$, $S_{y=0} = ?$ $S_{x=0} = ?$

(г) $x^2 + 4y^2 = 36$, $S_{y=0} = ?$

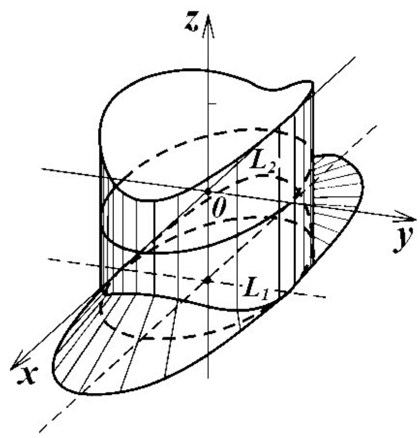
(д) $9x^2 = y(3-y)^2$, $y \in [0;3]$, $S_{y=0} = ?$

38.7. Найдите площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой

$$x = 2\sin t,\ y = 2\cos^2 t,\ \ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

вокруг оси Oy.

Пусть на цилиндрической поверхности заданы параметрически две кривые L_1 и L_2 уравнениями



$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z_1(t), \quad z = z_2(t), \quad t \in [\alpha; \beta],$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемы, а $z_1(t)$ и $z_2(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда площадь цилиндрической поверхности, заключенной между кривыми L_1 и L_2 и образующими, соответствующими $t = \alpha$ и $t = \beta$, равна

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(z_2(t) - z_1(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt. \qquad (7)$$

38.8. Найдите площадь части *цилиндрической поверхности* $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4$, отсеченной конической поверхностью $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = z^2$.

38.9. $\star$

(а) Радиус каждого из двух круговых цилиндров равен r, оси этих цилиндров пересекаются и перпендикулярны. Найдите площадь части одного цилиндра, расположенной внутри другого.

(б) Радиус каждого из трёх круговых цилиндров равен r, оси всех трёх цилиндров пересекаются в одной точке и попарно перпендикулярны. Найдите площадь поверхности тела, ограниченного этими тремя цилиндрами.

38.10. $\star$ Найдите объём сечения четырёхмерного куба

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \,\big|\, 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1,4}\}$$

гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.